ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

---------------- ---------------

NGUYỄN THỊ NGỌC MAI

VỀ PHƯƠNG PHÁP LẶP KRASNOSELSKII–MANN CHO ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN TRONG KHÔNG GIAN HILBERT VÀ ÁP DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ NGỌC MAI

VỀ PHƯƠNG PHÁP LẶP KRASNOSELSKII–MANN CHO ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN TRONG KHÔNG GIAN HILBERT VÀ ÁP DỤNG

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Trần Xuân Quý

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Bảng ký hiệu

H	không gian Hilbert thực
$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\mathbb{R}^+$	tập các số thực không âm
$\mathbb{N}$	tập các số tự nhiên
$\forall x$	với mọi x
A^{-1}	toán tử ngược của toán tử A
I	toán tử đồng nhất
$C[a, b]$	tập các hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$
$d(x, C)$	khoảng cách từ phần tử x đến tập hợp C
$\limsup_{n\to\infty} x_n$	giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$
$\liminf_{n\to\infty} x_n$	giới hạn dưới của dãy số $\{x_n\}$
$x_n \to x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0
$\mathrm{Fix}(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T

Mở đầu

Bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert hay không gian Banach là một trường hợp riêng của bài toán chấp nhận lồi: "Tìm một phần tử thuộc giao khác rỗng của một họ hữu hạn hay vô hạn các tập con lồi và đóng $\{C_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ của không gian Hilbert H hay không gian Banach E" với $\mathcal{I}$ là tập chỉ số. Bài toán này có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau như: xử lí ảnh, khôi phục tín hiệu, vật lý, y học,...

Khi $C_i = \mathrm{Fix}(T_i)$, tập điểm bất động của các ánh xạ không giãn T_i với $i = 1, 2, \ldots, N$, đã có nhiều phương pháp được đề xuất tìm điểm bất động chung của họ ánh xạ không giãn $\{T_i\}_{i=1}^N$ dựa trên các phương pháp lặp cổ điển nổi tiếng như phương pháp lặp Mann, phương pháp lặp Halpern, phương pháp lặp Ishikawa, phương pháp lặp Kranoselskii... Việc cải tiến và mở rộng các các phương pháp này cho các lớp bài toán liên quan đang là đề tài thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước.

Dưới sự hướng dẫn của TS. Trần Xuân Quý, tôi chọn đề tài: "Về phương pháp lặp Krasnoselskii–Mann cho ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert và áp dụng" cho luận văn thạc sĩ của mình. Mục tiêu của luận văn là trình bày một số phương pháp xấp xỉ điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert thực H trên cơ sở phương pháp lặp Krasnoselskii và phương pháp lặp Mann. Nội dung luận văn được trình bày trong hai chương. Cụ thể như sau:

Chương 1. Bài toán điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert

Chương này trình bày một số tính chất cơ bản của không gian Hilbert thực H, trình bày về ánh xạ không giãn, ánh xạ đơn điệu, phép chiếu mêtric trong không gian Hilbert cùng một số tính chất, giới thiệu về bài toán điểm bất động và một số phương pháp lặp cổ điển tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert thực H.

Chương 2. Phương pháp lặp Krasnoselskii–Mann cho ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert

Chương này trình bày phương pháp Krasnoselskii–Mann xấp xỉ điểm bất động cho ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert. Trình bày chứng minh các định lý về sự hội yếu, hội tụ mạnh của phương pháp cùng một số ví minh họa cho điều kiện đặt ra của các phương pháp.Một vài ứng dụng của phương pháp lặp Krasnoselskii–Mann đối với phương pháp tách Douglas–Rachford và phép chiếu luận phiên John von Neumann cũng được trình bày trong chương này.

Trong quá trình học tập và nghiên cứu tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, em luôn nhận được sự quan tâm giúp đỡ và động viên của các thầy cô trong Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo, Khoa Toán – Tin. Với bản luận văn này, em mong muốn được góp một phần nhỏ công sức của mình vào việc gìn giữ và phát huy vẻ đẹp, sự hấp dẫn cho những định lý toán học vốn dĩ đã rất đẹp. Đây cũng là một cơ hội cho em gửi lời tri ân tới tập thể các thầy cô giảng viên của trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên nói chung và Khoa Toán – Tin nói riêng, đã truyền thụ cho em nhiều kiến thức khoa học quý báu trong thời gian em được là học viên của trường.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu trường THSC Quang Trung, TP Yên Bái cùng toàn thể các anh chị em đồng nghiệp đã tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả trong thời gian đi học Cao học; cảm ơn các anh chị em học viên lớp Cao học Toán K11 và bạn bè đồng nghiệp đã trao đổi, động viên và khích lệ tác giả trong quá trình học tập và làm luận văn tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

Đặc biệt em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy giáo TS. Trần Xuân Quý đã luôn quan tâm ân cần chỉ bảo, động viên khích lệ, giúp đỡ tận tình và góp ý sâu sắc cho em trong suốt quá trình học tập cũng như thực hiện đề tài. Chặng đường vừa qua sẽ là những kỉ niệm đáng nhớ và đầy ý nghĩa đối với các anh chị em học viên lớp K11 nói chung và với bản thân em nói riêng. Xin chân thành cảm ơn tất cả những người thân yêu đã giúp đỡ, đồng hành cùng em trên chặng đường vừa qua. Một lần nữa, em xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 22 tháng 4 năm 2019

Học viên

Nguyễn Thị Ngọc Mai

Chương 1

Bài toán điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert

Chương này giới thiệu về một số tính chất của không gian Hilbert, ánh xạ không giãn, ánh xạ đơn điệu, đặc trưng của phép chiếu mêtric trong không gian Hilbert cùng một số phương pháp lặp xấp xỉ điểm bất động của ánh xạ không giãn. Nội dung của chương được viết trên cơ sở tổng hợp kiến thức từ các tài liệu [2], [3], [5], [8] và một số tài liệu được trích dẫn trong đó.

1.1 Ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert

Cho H là một không gian Hilbert thực với tích vô hướng $\langle .,. \rangle$ và chuẩn $\|.\|$, tương ứng. Cho $\{x_n\}$ là một dãy trong không gian H. Ta ký hiệu $x_n \rightharpoonup x$ nghĩa là dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu đến x và $x_n \to x$ nghĩa là dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến x.

1.1.1 Một số tính chất của không gian Hilbert

Trước hết ta nhắc lại định nghĩa về sự hội tụ yếu trong không gian Hilbert thực H.

Định nghĩa 1.1.1. Dãy $\{x_n\}$ trong không gian Hilbert H được gọi là hội tụ yếu về phần tử $x \in H$, nếu

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall y \in H.$$

Nhận xét 1.1.2. Từ tính liên tục của tích vô hướng, suy ra nếu $x_n \to x$, thì $x_n \rightharpoonup x$. Tuy nhiên, điều ngược lại không đúng.

Chẳng hạn xét không gian Hilbert

$$l^2 := \Big\{\{x_n\} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\Big\}$$

và giả sử dãy $\{e_n\} \subset l^2$ được cho bởi $e_n = (0, \dots, 0, \underset{\text{vị trí thứ n}}{1}, 0, \dots, 0, \dots)$, với mọi $n \geqslant 1$. Khi đó, $e_n \rightharpoonup 0$, khi $n \to \infty$. Thật vậy, với mỗi $y \in H$, từ bất đẳng thức Bessel, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, y\rangle|^2 < \|y\|^2 < \infty.$$

Suy ra $\lim_{n\to\infty}\langle e_n, y\rangle = 0$, tức là $e_n \rightharpoonup 0$. Tuy nhiên, $\{e_n\}$ không hội tụ mạnh về 0, vì $\|e_n\| = 1$ với mọi $n \geqslant 1$.

Một số tính chất của không gian Hilbert thực H được trình bày trong bổ đề dưới đây.

Bổ đề 1.1.3. (xem [2]) *Cho H không gian Hilbert thực. Khi đó:*

(*i*) $\|x + y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\langle x + y, y\rangle \quad \forall x, y \in H.$

(*ii*) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$ *với mọi* $x, y \in H$*;*

(*iii*) $\|tx + (1-t)y\|^2 = t\|x\|^2 + (1-t)\|y\|^2 - t(1-t)\|x-y\|^2$ *với mọi* $t \in [0, 1]$ *và mọi* $x, y \in H$.

Bổ đề 1.1.4. (xem [2]) *Mọi dãy bị chặn trong không gian gian Hilbert đều chứa một dãy con hội tụ yếu.*

1.1.2 Phép chiếu mêtric trong không gian Hilbert

Mệnh đề 1.1.5. (xem [2]) *Cho C là một tập con lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert thực H. Khi đó với mỗi $x \in H$, tồn tại duy nhất phần tử $P_c x \in C$ sao cho*

$$\|x - P_C x\| \le \|x - y\| \quad \text{với mọi} \quad y \in C. \tag{1.1}$$

Chứng minh. Thật vậy, đặt $d = \inf_{u\in C} \|x - u\|$. Khi đó, tồn tại dãy $\{u_n\} \subset C$ sao cho $\|x - u_n\| \to d$ khi $n \to \infty$. Từ đó,

$$\|u_n - u_m\|^2 = \|(x - u_n) - (x - u_m)\|^2$$